ABMYO
Dergisi. 18, (2010) (12-23)

Sabit bin Kurra'nın ikinci derece denklemlerinin geometrik çözümleri

Ali DÖNMEZ[1]

Özet

Bu çalışmada, ünlü Arap matematikcisi Sabit Bin Kurra'nın (834-901) ikinci derece denklemlerini geometrik yoldan nasıl çözdüğü işlenecektir.

Anahtar Kelimeler: Sabit Bin Kurra, İkinci derece denklem

The geometric solutions of quadratic equations given by Thabit bin Qurra

Abstract

In this work, we have studied how the geometric solutions of quadratic equations were given by the famous Arabian mathematian Thabit bin Qurra (834-901).

Keywords: *Equations, amicable numbers, geometric solutions of quadratic equations.*

Giriş

Babilliler, ikinci derece denklemlerini kendi dillerindeki çivi yazılarıyla ve bazı sözel komutlarıyla, bugün bizim kullandığımız tam kareye tamamlama yöntemine eşdeğer bir yolla çözmüşler ve uygulamalar yapmışlardır. Bu çalışmalar 1940 yılından sonra yapılan kazılarla ortaya çıkarılabilmiş ve okunabilmiştir. Mezopotamya'daki uygarlıktan çok sonra denklem çözümleri Çin, Hindistan, Yunanistan ve İslam ülkelerinde önem kazanmıştır. Rönesans öncesinde de Avrupa'ya geçmiştir.

Orta Doğu'da ikinci bir cebirci olarak Sabit bin Kurra (836-901) sayılabilir. 836 yılında Harran'da doğan Sabit bin Kurra Harran Sabilerindendir. Chwolson'un yazdıklarına göre 77 güneş yılı yaşayan Kurra 901 yılında öldüğüne göre doğum tarihi 824 olmalıdır. Doğum tarihi bazı kaynaklara göre 826, bazılarına göre 836 olarak geçer. Kabul edileni ise 836 yılıdır.

---

[1] *Prof. Dr. ALİ DÖNMEZ, Aydın Üniversitesi Mühendislik ve Mimarlık Fakültesi, Makine Bölümü, Florya Yerleşkesi, Küçükçekmece-İstanbul*

Harran Sabileri Tanrıya yıldızlar aracılığıyla yakardıkları için onlarda gökbilimi çok ilerlemiştir. Sabilere bu nedenle yıldızlara tapanlar da denmiştir. Yalnız, Harran Sabileri Arabistan yarımadasında yaşayan İslam öncesi Sabilerinden farklıdır.

Sabit bin Kurra çevresinde yaygın olan boş düşünce ve inanışlara pek aldırmamıştır. Bunlara inanmadığı gibi karşı çıktığı da olmuştur. Aslında kendisi bir Arap matematikçisi, hekimi ve düşünürü olarak bilinir ve böyle tanınmıştır. Dokuzuncu yüzyılda hızla gelişen Arap-İslam kültürünün en ileri gelen temsilcilerinden birisidir.

Kurra varlıklı bir ailenin oğluydu. Kuyumculuk yaptığı sıralarda farklı paraları birbirine çok usta ve hızlı bir şekilde çevirdiği için dikkat çekiyordu. Kuyumculuktan kazandığı varlıkla birlikte Bağdat'a gitti. Burada kendi özel yeteneği sayesinde kapsamlı bir matematik ile felsefe, tıp, astronomi ve astroloji öğrenimi gördü. Doğduğu kente döndüğüne, hala Sabiliğe ve öteki Helenistik putperest inançlara bağlı dindaşları onun felsefi görüşlerini tepkiyle karşıladılar. Yerel bir din mahkemesinde yargılanmak üzere çağrılınca yanlış felsefi görüşlerinden vazgeçtiğini açıkladı ve Harran'ı terk ederek yargılanmaktan kurtuldu. Kofortusa kasabasında karşılaştığı Şakir'in oğlu Muhammet bin Musa'yla birlikte Bağdat'a gitti. Orada Abbasi Halifesi Mutezit'in (892-902) hüküm sürdüğü dönemin danışmanları aracılığıyla sarayın gökbilgini oldu. Yaşamının geriye kalan bölümünü sarayda matematik, felsefe ve tıp konularında kitaplar yazmakla geçirdi. Ayrıca, Yunanlı matematikçilerin ve gökbilimcilerin yapıtlarını Arapçaya çevirmek ve onları öğrenmekle uğraştı.

Sabit bin Kurra o dönemin Bağdat bilminin patronları olan Şakir'in oğulları Muhammet, Ahmet ve Hasan'dan çok yakınlık gördü. Uzun bir süre Muhammet'in evinde kaldı. Bu sırada Halifeye tanıtıldı. Bu olayların tümü 873 yılının ocak ayında Muhammet'in ölümünden önce gerçekleşti. Yazdığı eserler tıp, felsefe, matematik ve astroloji üzerine olmuştur. Kendisi Yunanca ve Suriyeceden Arapçaya çeviri yapan en usta biri olarak bilinir. Euclides'ten, Arcihemedes'ten, Apollonios'tan, Ptolemaios'tan, Nikomachos'tan, Proklos'tan ve diğer Yunanlı bilginlerden çok sayıda çeviri yaptı. Barhebraeus'un yaptığı taramalara göre Kurra'nın sadece Suriyece Yazdığı 150 tane kitabı vardır. Yaptığı çeviriler ve yazdığı Arapça eserler bu sayının dışındadır. Bunlardan bizi daha çok ilgilendiren ilki astronomi, ikincisi cebir ve diğeri de aritmetik üzerine olan kitaplarıdır.

Astronomi üzerine olan ilginç çalışmasının yalnız Latince çevirisi ve baskısı vardır. Bu çalışmanın Latince çevirisi 1960 yılında C.F. Carmody tarafından, Sabit bin Kurra'nın Astronomi Çalışmaları ismiyle yayınlanmıştır. Bu kitabın daha iyi anlaşılması için açıklama İngilizce çevirisi Otto Beugebaur tarafından yapılmıştır.

Kurra'nın "Sekiz Küresi", sabit yıldızların küresiyle ilgilidir. Bu kürenin içinde beş "yıldız gezegeninin" yedi küresi düşünülmüştür. Modern astronomide sabit yıldızların hemen hemen hareketsiz oldukları düşünülmüştür. Gün dönümü noktalarının sabit yıldızlara göre küçük olan küçük hareketlerinin olduğu varsayılmıştır. Ptolemy kuramına göre gün dönümü noktaları sabittir. Yıldızların ancak 100 yılda 1 derecelik bir geri hareketi vardır. Sabit bin Kurra, bu küçük değişimlerin gözlemlerle belirlenemeyeceğine dikkatleri çekti. Yani gün dönümü noktalarına göre daha fazla olmalıdır. Halife el Memun döneminin astronomlarınca yapılan duyarlı gözlemler zaten Kurra'yı doğrular yönündeydi. Bu nedenle Kurra bu olayı açıklayabilmek için sabit yıldızların küresinin hareketinin devirli bir hareket olduğunu kabul etti.

Sabit bin Kurra'nın açıkladığı diğer bir olay daha vardı. O da ekliptikliğin azalmasının nedenini açıklamasıdır. Eski Yunanlılar bu eğikliği yirmi dört derece olarak tahmin etmişlerdi. Ptolemy, Eratosthenes'in tahmin ettiği eğiklikten biraz daha küçük bir eğikliği hesaplamalarında kullanmıştı.

Oysa, el Memun döneminin astronomları tarafından Bağdat'ta yapılan gözlemlerle bu eğikliği 23 derece ve 33 dakika olduğunu saptamışlardı. Tüm bu olayları Kurra'nın yaptığı incelikli gözlemlerle açıkladığı bilinmektedir. O bu çalışmalarını yaptığı iki tane küçük tablo ile yayınlamıştır. Bu teknik konulara fazla derinlemesine girmeye burada gerek yoktur.

Sabit bin Kurra'nın ikinci derece denklemleri geometrik yolla çözmesi ilginçtir. Bu çözümleri içeren çalışması halen Ayasofya Müzesi'nde 2457, 3 numarayla kayıtlıdır ve koruma altındadır. Tek kopya olan bu çalışmanın açıklamalı Almanca çevirisi 1941 yılında Leipzig'de P. Luckey tarafından yapılmıştır.

Sabit bin Kurra'nın ikinci derece denklemleri özet olarak üç türe dönüştürülebilir. Bunlar bugünkü dille

$$x^2 + mx = n$$

$$x^2 + b = ax$$

ve

$$a + ax = x^2$$

biçimindedirler. Kurra'nın bu denklemlerinin çözümleri, Euclides'in Elements isimli kitabının ikinci cildinde yaptığı çözümlere çok benzemekte ve buradaki beşinci ve altıncı önermeler kullanılmaktadır. Hatta yaptığı işlemlerin birçok komutu Euclides'ten alınmadır. Örneğin,

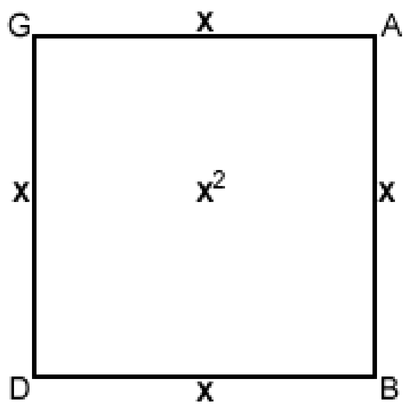
$$x^2 + mx = n$$

biçimindeki ikinci derece denklemi Euclides'in ikinci kitabında kullandığı altıncı önermeyle çözmüştür.

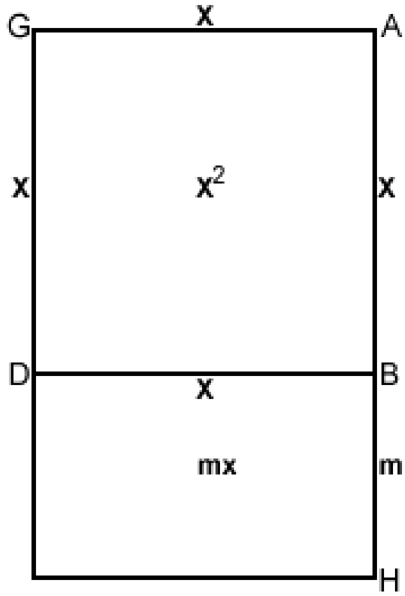
Şimdi, Sabit bin Kurra'nın

$$x^2 + mx = n$$

biçimindeki denklemini geometrik bir yolla nasıl çözdüğünü gösterelim. Bunun için bugünkü dille bazı kolaylaştırıcı yolları da kullanacağım. Önce kenarları x olan ABDG karesini



biçiminde çizelim. Burada AB=BD=DG=GA=x olarak alınmıştır. Sonra x kökünün katsayısı kadar olan BH uzunluğunu çizerek DH şeklini



biçiminde tamamlayalım. Böylece GH şeklinin alanı $x^2 + mx$ olur. Bu alan da n sayısı olarak veriliyor. Diğer yandan AB ile BH uzunluklarının çarpımı DH şeklinin mx alanına eşittir. Çünkü AB=DB biçimindedir.

Yalnız burada birim yönüyle bir karışıklık vardır. Alan ile bir doğru parçasının uzunluğunun toplamının bir sayı olması Euclides'te de vardır ve o bu birimlere pek aldırış etmiyordu. Eğer e sayısı birim uzunluğu gösterirse,

$$x^2 + mx = 8$$

olan ikinci derece denklemi x ve e birim doğru cinsinden

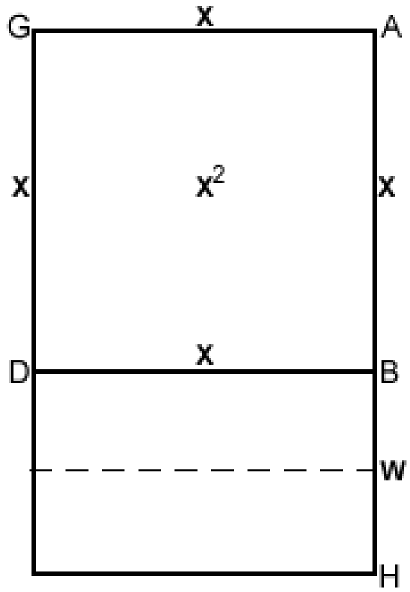
$$x^2 + mex = ne^2$$

olarak yazılabilir. Bu halde birim sıkıntısı kalmaz.

Şimdi problem x ile x+m sayılarının çarpımı n ve farkı da m olarak verildiğinde x sayısı nasıl bulunur problemine dönüştü. Bu problemin çözümü de Euclides'in Elements isimli ikinci kitabında verilen altıncı önermeyle çözülecektir. Bunun için BH doğru parçasının orta noktası W ile gösterilsin. Buna göre HA ile AB uzunluklarının çarpımına BW uzunluğunun karesi eklenirse bu toplam AW uzunluğunun karesine eşit olur. Euclides'in bu söyleşinin bugünkü dille ifadesi

$$HA.AB + (BA)^2 = (AW)^2 + (AB + BW)^2$$

ya da



$$x^2 + mx + \frac{1}{4}m^2 = (x + \frac{1}{2}m)^2$$

yazılır. Bu denklemde birinci yan $n + m^2 / 4$ olduğundan bu denklem daha kısa olarak

$$(x + \frac{1}{2}m)^2 = n + \frac{1}{4}m^2$$

biçiminde yazılır. İlk yazılan denklemin birinci yanındaki HA.AB çarpımı n olarak ve BW uzunluğunun karesi de $m^2 / 4$ olrak biliniyor. Ayrıca AW uzunluğunun karesi de

$$n + \frac{1}{4}m^2$$

bilindiğinden AW uzunluğu da

$$AW = \sqrt{n + \frac{1}{4}m^2}$$

olarak bilinir. Böylece x=AW-BW olarak bulunur.

Kurra'nın çalışmasının en ilginç kısmı şöyle sona ermektedir. Bu denklemin çözümünde izlenecek yol komutlarla şöyledir. x teriminin katsayısının yarısı ile kendisinin çarpımı bu sayının yarısının karesine eşittir. Bu sonucu n olan yani HA ile AB sayılarının çarpımına eklersen AB ile x teriminin katsayısının yarısı olan terimin toplamının karesini bulursun. Bu sonucun kare kökünü alıp bundan BH uzunluğunun yarısını çıkarırsan bilinmeyen AB=x uzunluğunu elde edersin.

Şüphesiz, Kurra'nın döneminde yukarıda kullanılan modern matematik işaretlerinin hiçbirisi yoktu. Burada yapılan işlemlerin okuyucular tarafından daha iyi anlaşılması için onun komutlarını bugünkü dille yazmaya özen gösterdik.

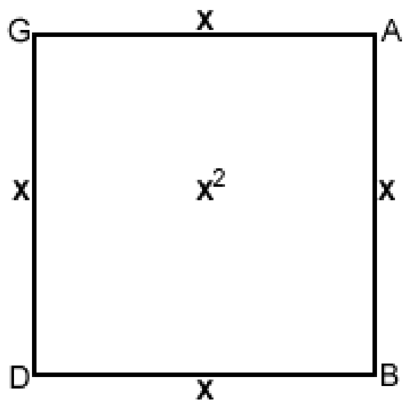
Sabit bin Kurra'nın ikinci denklemi bugünkü dille

$$x^2 + b = ax$$

biçimindeydi. Yani, kare ve sayı köke eşitti. Kurra bu denklemin çözümünde yine Euclides'in Elements isimli kitabının ikinci cildindeki 5. Önermeyi kullanmıştır.

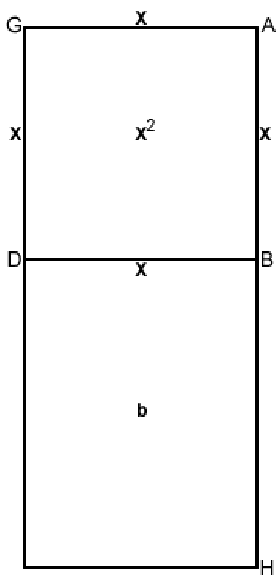
Burada yine Kurra'nın komutlarını olabildiği kadarıyla bugünkü dille yazmaya özen göstereceğiz.

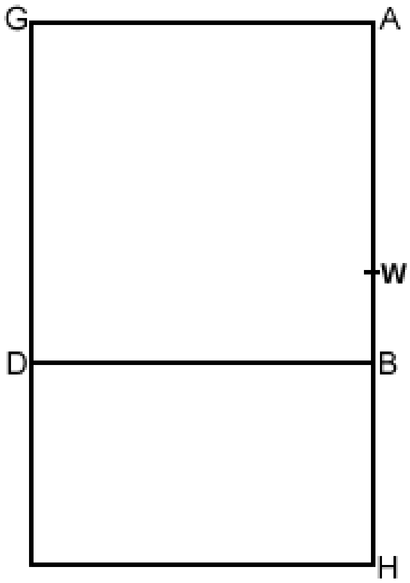
Önce kenarları x uzunluğunda olan ABDG karesini



biçiminde çizelim. Sonra bu şekli alanı $x^2 + b$ olan GH dikdörtgenine tamamlayalım. Buna

$x^2 + b$ =ax olur ve buradan,



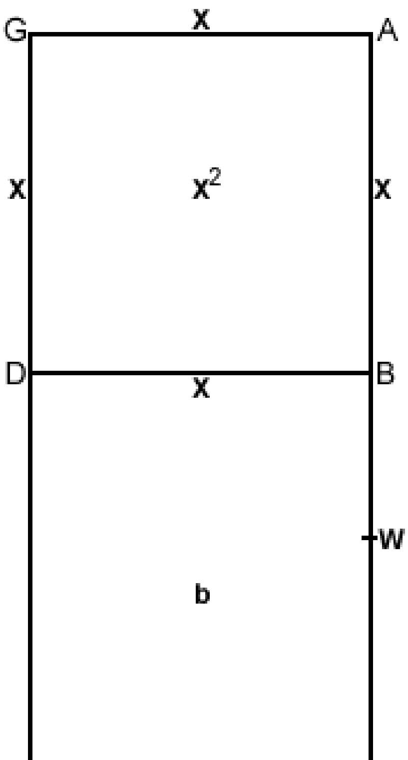


$x^2 + b = GA.AH$ yazılır. Bu şekle göre GH dikdörtgeninin alanı GB karesinin alanından büyük olduğu için AH=a uzunluğundan büyüktür. Öyleyse $x^2 + b = ax$ eşitliğinin her iki yanından GB karesinin x^2 alanı çıkarılırsa

$$b = GA.AH - x^2 = xa - x^2 = ax - x^2$$

yazılır. Bu b sayısı $b=AB.BH$ olduğundan, şimdi problem çarpımları b ve toplamları a olan AB ve BH uzunluklarının bulunmasına dönüştü.

Euclides'in Elements isimli kitabının ikinci cildindeki 5. Önermeye göre bu sayılar bulunacaktır. Bunları bulabilmek için AH uzunluğunun orta noktası W ile gösterilsin. Bu gösterime göre aşağıdaki şekiller çizilebilir.



Şimdi AB ile BH sayılarının çarpımına BW sayısının karesi eklenirse bu AW sayısının karesine eşit olur. Yani,

$$AB.BH + (BW)^2 = (AW)^2$$

yazılır. Bu da bugünkü dille

$$x(a-x)+(\frac{a}{2}-x)^2=(\frac{a}{2})^2=\frac{1}{4}a^2$$

$$ax-x^2+(\frac{a}{2}-x)^2=\frac{1}{4}a^2$$

$$b+(\frac{a}{2}-x)^2=\frac{1}{4}a^2$$

veya

$$(\frac{a}{2}-x)^2=\frac{1}{4}a^2-b$$

yazılır. $AB.BH+(BW)^2=(AW)^2$ denkleminde AW bilindiğinden karesi olan $(AW)^2$ biliniyor. *AB.BH=b* olarak veriliyor. Öyleyse

$$(BW)^2=(AW)^2-AB.BH$$

Farkı da biliniyor. Böylece

$(BW)^2$ sayısının kare kökü de bilineceği için BW bulunur. AW sayısından BW sayısı çıkarılırsa veya eklenirse $x=AW\pm BW$ kökü bulunur.

Bu sonucun bugünkü dille yazılışı

$$x=\frac{a}{2}\pm\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2}=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

biçimindedir.

Kurra'nın sayı ve kökün kareye eşit olması, yani

$$b+ax=x^2$$

denklemi de yine bunlara benzer yöntemlerle geometrik olarak çözülmüştü. Bu çözümde Euclides'in Elements isimli kitabının 2. Cildindeki 6. Önerme kullanılmıştır.

Harizmi cebirinde, el cebri ve mukabele kullandığı halde, Kurra ikinci sözcüğü atmış ve çözümde sadece el cebri kullanmıştır. Bu nedenle bu iki bilgin iki farklı okullara ait cebircilerdi. Kurra, Euclides türü bir cebirci olduğu halde Harizmi daha çok Hint ve Türk kökenli cebir yolunu izliyordu. Harizmi'nin çözümleri biraz da Babil kökenliydi. Kurra'ya göre denklemlerin cebirsel çözümlerinde tümüyle Euclides'in geometrik çözüm yöntemleri kullanılmalıydı. Kurra'nın burada yaptığı yenilik, geometri ile cebir arasında kurulan matematiksel ilişkidir. Yoksa her ikisinin çözümlerinde kullandıkları işlemler gereksiz fazlalıklardı. Her iki yazarın çözümlerinde sıfır ve negatif kökler göz önüne alınmamıştır. Yani bu çözümler tam değildir. Hele karmaşık köklerin bu yöntemle bulunması olanaksızdır. Çünkü,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

biçimindeki denklemi

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{d} = \frac{b^2}{4a^2}$$

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

biçimindeki çözümünde geometriye hiçbir gereksinme yoktur. Üstelik bu formül gerçel ve karmaşık tüm kökleri vermektedir. Zaten Babil, Mısır, Maya, Çin, Hint, Türk, İran, Suriye, İbrani ve Arap matematikçilerinin yapamadıkları, sonlu tane dört işlem ve köklerle, bilinmeyen x terimini bu katsayılar cinsinden yazamadıklarından kaynaklanmıştır. Aslında Babillilerin ikinci derece denkleminin çözümü için yaptığı tam kareye eşdeğer olan yöntemleri daha çok cebirseldir ama o da tam değildir. Yalnız

$$ax^2 + bx + c = 0$$

biçimindeki ikinci derece denkleminin köklerini veren

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

formülünün kimin tarafından bulunduğu bilinmemektedir. Yapılan çalışmalar sonunda ortak olarak ortaya çıkmıştır.

Sabit bin Kurra, arkadaş (amicable) sayılar üzerine de bir kitap yazmıştır. Onun bu kitabının bir kısmı P. Woepeke tarafından 1852 yılında Fransızcaya çevrilmiştir. Kısaca m ve n gibi iki doğal sayının arkadaş (amicable) olabilmesi için gerekli ve yeterli koşulun, bu sayıların her birinin özçarpanlarının toplamının diğer sayıya eşit olmasıdır şeklinde tanımlanır. Örneğin 220 ve 284 ikilisi arkadaş sayılardır. Çünkü 220 sayısının özçarpanları 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44 ve 110 olduklarından bu sayıların toplamı 284 ve 284 sayısının özçarpanları 1, 2, 4, 71 ve 142 olduklarından bu sayıların toplamı da 220 olur. Bu iki arkadaş sayıların eski Pisagorcular tarafından bilindiğini hemen belirteyim.

Kurra, $p = 3.2^{n-1} - 1$ ve $q = 3.2^{n} - 1$ ve $r = 9.2^{2n-1} - 1$ sayıları asalsa,

$$M = 2^{n} pq \text{ ve } N = 2^{n} r$$

sayılarının da arkadaş sayılar olduklarını bu kitabında kanıtlamıştır. Arkadaş olan ikili sayıların bulunmasında Sabit bin Kurra'nın bu yöntemi daha sonra Fransız matematikçileri Pierre de Fermat ve Rene Descartes tarafından yeniden bulunmuştur. Arkadaş sayıların bulunuşu ve kullanılışı eski Yunanlılarda vardı. Euclides'in Elements isimli kitabında buna ilişkin örnekler vardır. Fermat, bu 220 ve 284 arkadaş çiftlerinden başka

$$17296 = 2^{n}.23.47$$

$$18416 = 2^{n}.1151$$

şeklinde arkadaş olan bir ikili daha bulmuştur. Dikkat edilirse, bu da Kurra'nın bulduğu formüllerde n=4 alınmasından başka bir şey değildir.

Descartes, Sabit bin Kurra'nın bu arkadaş sayı olan ikililerine

$$9363584 = 2^{7}.191.383$$
$$9437056 = 2^{7}.73727$$

arkadaş ikililerini de eklemiştir.

Sabit bin Kurra'nın bu kuralı nasıl bulduğu akla gelmektedir. Gerçekten, 220 ve 284 olan arkadaş çiftlerin çarpanlara ayrılmış şekli ***p,q ve r*** asal sayılar için sırasıyla $2^{2} pq$ ve $2^{2} r$ biçimindedir.

M ve N arkadaş olan bir çift olsun. Buna göre

$$M = 2^{n} pq \text{ ve } N = 2^{n} r$$

çiftini bulup bulamaycağımıza bakalım. Bunun için ***N*** sayısının kendisi de dahil tüm çarpanlarının toplamının

$$(1 + 2 + ... + 2^{n})(r + 1)$$

ve ***M*** sayısının kendisi de dahil tüm çarpanlarının toplamının

$$(1 + 2 + ... + 2^{n})(pq + p + q + 1)$$

olduğunu Sabit'in bildiğini kabul edelim. Bu ifadelerin toplamı ***M+N*** olur. Buna göre,

$$r = pq + p + q \qquad (1)$$

$$(2^{n+1} - 1)(pq + p + q + 1) = 2^{n} pq + 2^{n} r \qquad (2)$$

yazılır. (1) değeri (2) ifadesinde yerine yazılırsa, ***p*** ve ***q*** cinsinden

$$(2^{n+1}-1)(pq+p+q+1)=2^n pq+2^n(pq+p+q) \qquad (3)$$

elde edilir. Bu da bu günkü dille,

$$2^n(p+q+2)=pq+p+q+1 \qquad (4)$$

şeklinde kısaltılabilir. (4) denkleminde ***p+1=P*** ve ***q+1=Q*** gösterimleri kullanılırsa bu ifade kısaca

$$2^n(P+Q)=PQ$$

olarak yazılır. Bu eşitliğin her iki yanına 2^{2n} terimi eklenir ve her iki yandan $2^n(P+Q)$ terimi çıkarılırsa

$$2^{2n}=PQ-2^nP-2^nQ+2^{2n}$$

veya

$$2^{2n}=(P-2^n)(Q-2^n)$$

olur. Bu son eşitliğin ikinci yanındaki iki çarpanın işaretleri bir kere aynı olmalıdır. Eğer bu çarpanların her ikisi birden negatifse bunların çarpımı 2^{2n} sayısından küçüktür. Çünkü $P<2^n$ ve $Q<2^n$ ise $PQ<2^n2^n=2^{2n}$ olur. Bu hal olanaksızdır. Öyleyse bu çarpanların her ikisi de pozitif olmalıdır. Bu çarpanların çarpımı 2^{2n} olduğundan, ***P<Q*** olduğu kabul edilirse

$$P-2^n=2^{n-t}$$
$$Q-2^n=2^{n+t}$$

olmalıdır. En basit şekilde t=1 olarak seçilirse

$$P=2^n+2^{n-1}=3.2^{n-1}$$

$$Q=2^n+2^{n+1}=6.2^{n-1}$$

yazılır. Böylece, Sabit'in çözümü

$$p=3.2^{n-1}-1$$
$$q=3.2^n-1$$
$$r=PQ-1=9.2^{2n-1}-1$$

olarak bulunur.

Eğer n=8 ve t=7 olan olasılık seçilirse, Legendre tarafından 1830 yılında bulunan $2^8.257.33023$ ve $2^8.8520191$ olan arkadaş sayı çiftleri bulunur.

Yukarıdaki hesaplamalarda

$$(p+1)(q+1)=pq+p+q+1 \qquad (6)$$

ve

$$(p-2^n)(Q-2^n)=PQ-2^nP-2^nQ+2^{2n} \qquad (7)$$

özdeşlikleri göz önüne alındı. Bunlar da Euclides'in Elements isimli kitabının ikinci cildindeki özdeşliklerden başka bir şey değildir. Bu da Euclidesçi olan Sabit bin Kurra tarafından iyi bilinen şeylerdi.

Fermat ve Descartes'ten sonra arkadaş sayıların problemleri üzerine ilk kez Leonard Eucler çalıştı. Çok keskin bir zekaya sahip olan Euler bu konu üzerinde üç makale yayınladı. İlk makale 1747 yılında yayınlandı. Bu makalede Sabit bin Kurra paralelinde Euler tarafından otuz tane arkadaş çifti elde edildi.

İkinci makale 1750 yılında yayınlandı. Bu makale bu konuyu tam olarak işledi ve arkadaş sayı çiftlerin sayısını altmış ikiye çıkardı. Euler bu ikinci makalede önemli iki problem çözdü. Birinci problem, p, q ve r asal sayıları için apq ve ar türünde olan arkadaş sayıları bulmaktı. İkinci problem ise, apq ve ars türündeki arkadaş sayıları benzer yöntemle buldu.

Üçüncü makalede apq ve ar türünde olan arkadaş sayı çiftlerine dört tane örnek daha oluşturdu.

Kaynaklar: Dönmez, A. , Matematik Tarihi, 10 cilt.